Teorema del Aporte de Nuevas Diagonales

Publicado el 21/01/2016| 2 comentarios

Gaurish Korpal, quien nos hizo el otro día una interesantísima aportación, mantiene un excelente blog de matemáticas por el que paso con asiduidad.

Uno de sus artículos trata de un atractivo teorema descubierto (y demostrado) por él mismo referido a las diagonales de los polígonos. Le llama

NEW DIAGONAL CONTRIBUTION THEOREM (NDCT)

que se traduciría por ***Teorema del Aporte de Nuevas Diagonales***.

Dice que

Dado un polígono de *n* lados (*n*>3), el número de nuevas diagonales que se van dibujando a partir de un vértice y siguiendo por los sucesivos adyacentes (en un sentido dado) viene determinado siempre por la secuencia *n*-3, *n*-3, *n*-4, …, 2, 1, 0, 0

Pueden verse en la imagen ejemplos para polígonos de 4 a 8 lados en los que, a partir de las diagonales de un vértice (escrito en rojo) se sigue, en sentido contrario a las agujas del reloj, por los demás vértices dibujando nuevas diagonales comprobando la afirmación del teorema. El número de dichas diagonales se señala al lado del vértice correspondiente.

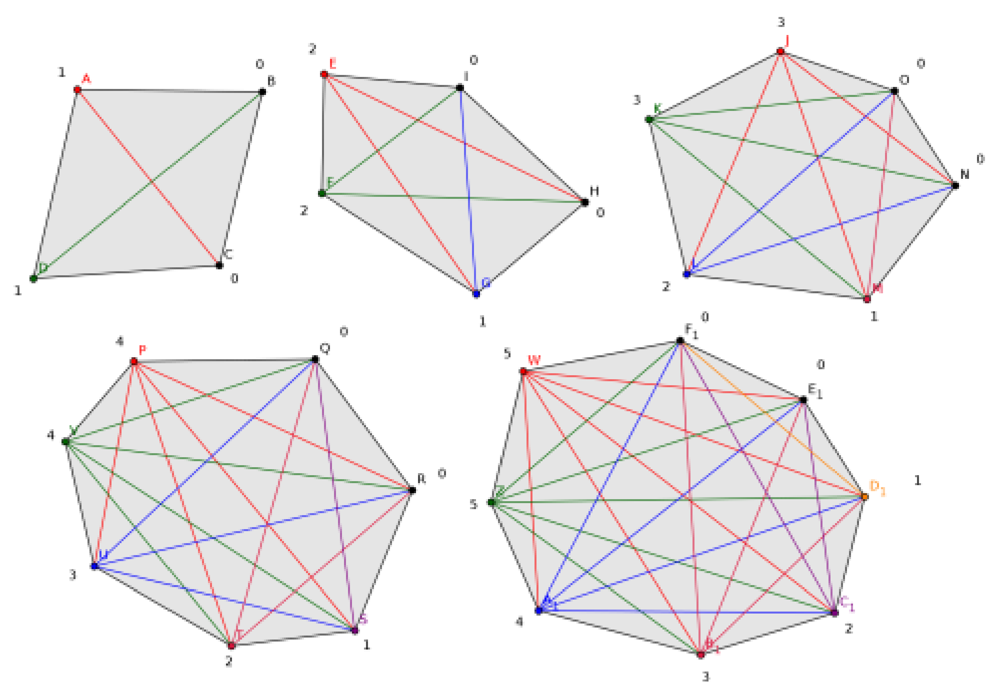

Image produced using GeoGebra 4.0.34.0 on Ubuntu 14.04
© 2015, Gaurish Korpal (gaurish4math.wordpress.com)

La secuencia para los cuadriláteros es 1, 1, 0, 0; para los pentágonos 2, 2, 1, 0, 0; para los hexágonos 3, 3, 2, 1, 0, 0; … y, así, sucesivamente.

La **demostración** es elemental: dado un polígono de *n* lados (*n*>3) el primer vértice tomado puede conectarse con los *n*-1 vértices restantes formando *n*-1 segmentos pero con los dos adyacentes forma lados del polígono, por lo que el número de diagonales que se construyen es *n*-3.

Con el siguiente vértice (siguiendo un sentido que será, ya, el mismo siempre) aparecen, por la misma razón, *n*-3 nuevas diagonales.

Con el tercer vértice aparecerán las mismas diagonales excepto la construida con el primer vértice, que ya estará dibujada. En suma, serán *n*-4 las nuevas diagonales.

El cuarto vértice determinará *n*-5 nuevas diagonales pues las diagonales con los dos primeros vértices estarán ya creadas.

Con los demás vértices pasará algo similar (siempre se podrán construir diagonales en una cantidad de una unidad menor respecto a las construidas a partir del vértice anterior) hasta llegar al antepenúltimo vértice que permitirá la creación de una única diagonal con el último vértice que podamos tomar. Además esa diagonal será la última posible pues con los dos restantes vértices no podremos crear ninguna diagonal más.

De esta manera se crea la secuencia que se ha dado en el enunciado y queda demostrado el teorema.

¡Ah!: es evidente que la suma de todos los términos de la secuencia es igual al número de diagonales del polígono que, como se sabe, es ***n*.(*n*-3)/2**. Dejo a los lectores la demostración, también muy sencilla.

NOTA FINAL: Agradezco la aprobación de Gaurish Korpal para la creación y emisión de este artículo, traducción del suyo.